Le taquin

# Présentation

Jeu en solitaire. Une grille de N cases, de largeur L cases, de hauteur H cases, sur laquelle peuvent se déplacer d’une case à l’autre des pièces numérotées de 1 à N.

Les pièces peuvent montrer une partie d’une image, mais le principe reste le même : il faut réorganiser les pièces de manière à les reclasser.

* Les seuls mouvements autorisés impliquent la pièce n° N : elle peut permuter avec une de ses voisines par un coté (les voisines d’angle sont exclues).

|  |  |
| --- | --- |
|  | Techniquement, la pièce N n’est pas sur la grille, laissant un trou dans lequel on peut glisser justement l’une des voisines du trou. Le trou prend alors la place de la voisine.  C’est pourquoi on appelle cette pièce N la case vide. On la note souvent V. |
| Remarque : on pourra envisager une variante où la case vide n’est pas la dernière, mais peut être n’importe laquelle des N pièces. | |

# Objectif

Mettre au point un algorithme de résolubilité, un algorithme de résolution.

En effet, on va voir que toutes les positions initiales ne sont pas résolubles.

Si on a le second algorithme, il peut servir à tester si une disposition initiale est résoluble. Mais on peut aussi envisager un algorithme qui évalue cette résolubilité sans résoudre explicitement le jeu, de manière plus efficace.

# Un peu de vocabulaire (et de théorie)

## Permutations

* Dans une suite ordonnée d’objets (ici nos pièces, la pièce vide comprise), mélanger cette suite s’appelle une permutation.
* Si une permutation ne concerne exactement que deux pièces distinctes, on l’appelle une transposition.
* Dans une permutation, les objets qui ne changent pas de place s’appellent des points fixes.

Exemple, ordonnons les 16 pièces d’un puzzle 4x4 de gauche à droite en partant du haut, et présentons ces pièces numérotées de 0 à 15 sur une seule ligne :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Cette représentation correspond au puzzle rangé :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 0 | 1 | 2 | 3 | | 4 | 5 | 6 | 7 | | 8 | 9 | 10 | 11 | | 12 | 13 | 14 | 15 | |

Pour plus de facilité de lecture, on va donner dans deux colonnes qui encadrent ce puzzle les indices des cases de début et de fin de chaque ligne

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | | 8 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | | 12 | 12 | 13 | 14 | 15 | 15 | |

Ces indications seront utiles pour suivre les explications qui suivent.

La case 15 étant la case « vide ».

Si on mélange ce puzzle (hors de toute considération de validité des mouvements effectués), on peut obtenir le puzzle mélangé suivant :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 0 | 6 | 10 | 2 | 5 | 3 | | 4 | 14 | 8 | 7 | 3 | 7 | | 8 | 0 | 12 | 4 | 11 | 11 | | 12 | 9 | 15 | 1 | 13 | 15 | |

Chaque n° de pièce est présent une et une seule fois dans ce tableau mélangé (une permutation -sur un ensemble fini- est en fait une bijection, et toutes les bijections d’un ensemble fini sur lui-même sont des permutations).

On va représenter cette permutation en listant les cases de destination du contenu des cases d’origine, par convention rangées de 0 à 15 (on rappelle, mais ce n’est pas strictement nécessaire, juste une aide, cette numérotation en petits caractères dans une première ligne)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 0 | 6 | 5 | 12 | 1 | 11 | 9 | 15 | 4 | 13 |

Une telle représentation se lit ainsi :

* Le contenu de la case 0 du plateau initial va en case 8 dans le plateau final
* Le contenu de la case 1 du plateau initial va en case 14 dans le plateau final
* Le contenu de la case 2 du plateau initial va en case 2 dans le plateau final
* Le contenu de la case 3 du plateau initial va en case 7 dans le plateau final
* Le contenu de la case 4 du plateau initial va en case 10 dans le plateau final

Etc.

Elle décrit la permutation qui a mené la position rangée initiale à la position mélangée ci-dessus.

Mais dans le cas d’une position initiale non rangée, ce même tableau décrit les opérations à effectuer sur le contenu des cases de la situation d’origine pour remplir les cases d’une situation finale

On peut aussi le lire dans l’autre sens :

* La case 0 du plateau final contient le contenu de la case 6 du plateau d’origine
* La case 1 du plateau final contient le contenu de la case 10 du plateau d’origine
* La case 2 du plateau final contient le contenu de la case 2 du plateau d’origine
* La case 3 du plateau final contient le contenu de la case 5 du plateau d’origine

Etc.

Mais attention : il faut bien réaliser qu’on dispose d’une situation finale vide pour la remplir avec les opérations décrites ci-dessus avec le contenu d’une situation initiale. Il s’agit bien d’opérations d’un tableau initial vers un autre tableau.

* Cette description est appelée description directe de la permutation

Remarque : on aurait pu choisir la description inverse :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 |

Se lit ainsi :

* Ce qui est en case 8 de la position finale vient de la case 0 de la position initiale
* Ce qui est en case 14 de la position finale vient de la case 1 de la position initiale
* Ce qui est en case 2 de la position finale vient de la case 2 de la position initiale
* Ce qui est en case 7 de la position finale vient de la case 3 de la position initiale

Etc.

* Cette description est appelée description inverse de la permutation

Mais ce nouveau tableau peut s’interpréter comme une description directe d’une autre permutation.

Amusons-nous (car on est là pour s’amuser) à effectuer sur une position initiale d’abord la permutation directe de l’exemple dans une position puis la permutation directement décrite par la permutation inverse de l’exemple, dans une position  :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | 8 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 0 | 6 | 5 | 9 | 1 | 11 | 9 | 15 | 4 | 13 | | 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 | |

Interprétation de cette **composition** de permutations données par leurs descriptions directes :

* Ce qui est en case 0 dans va en case 8 dans puis ce qui est en case 8 dans va en case 0 dans
* Ce qui est en case 1 dans va en case 14 dans puis ce qui est en case 14 dans va en case 1 dans

Etc.

Finalement, on obtient une permutation de vers qui est la permutation **Identité**, aucune case n’a vu son contenu modifié en passant de à .

* Permutation Identité : celle qui ne change le contenu d’aucune case.
* La description inverse d’une permutation est aussi la description directe de sa permutation inverse.
* Appliquer une permutation P puis sa permutation inverse revient à appliquer la permutation identité.
* Une transposition est sa propre permutation inverse (on les appelle involutives). Ce sont les seules involutions parmi les permutations.

## Cycle

* Un cycle est une permutation particulière : elle implique une liste de *l* cases c0, c1, …, cl-1, pour lesquelles
  + c1 dans le tableau final reçoit le contenu de c0 du tableau initial
  + c2 dans le tableau final reçoit le contenu de c1 du tableau initial
  + jusqu’à :
  + cl-1dans le tableau final reçoit le contenu de cl-2 du tableau initial
  + et enfin c0 dans le tableau final reçoit le contenu de cl-1 du tableau initial

Un exemple de description directe d’un cycle de 6 cases (mises en couleur ici)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 1 | 2 | 7 | 4 | 3 | 0 | 6 | 5 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Le contenu de la case 0 de la position initiale va en case 8 de la position finale

Le contenu de la case 8 de la position initiale va en case 5 de la position finale

Le contenu de la case 5 de la position initiale va en case 3 de la position finale

Le contenu de la case 3 de la position initiale va en case 7 de la position finale

Le contenu de la case 7 de la position initiale va en case 6 de la position finale

Le contenu de la case 6 de la position initiale va en case 0 de la position finale

Et toutes les autres cases du tableau final reçoivent le contenu de la case de même indice du tableau initial.

On peut noter un tel cycle d’une manière synthétique :

(0, 8, 5, 3, 7, 6)

## Décomposition en cycles

Reprenons notre exemple de permutation

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 0 | 6 | 5 | 12 | 1 | 11 | 9 | 15 | 4 | 13 |

* Le contenu de la case 0 de la situation d’origine est placé en case 8 de la situation finale

Mais plutôt que de décrire où va le contenu de la case 1, intéressons-nous au contenu de la case 8

* Le contenu de la case 8 de la situation d’origine est placé en case 5 de la situation finale

Et on continue avec la case 5

* Le contenu de la case 5 de la situation d’origine est placé en case 3 de la situation finale
* Le contenu de la case 3 de la situation d’origine est placé en case 7 de la situation finale
* Le contenu de la case 7 de la situation d’origine est placé en case 6 de la situation finale
* Le contenu de la case 6 de la situation d’origine est placé en case 0 de la situation finale

On vient de décrire un cycle :

(0, 8, 5, 3, 7, 6)

J’ai coloré les cases de ce cycle

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 0 | 6 | 5 | 12 | 1 | 11 | 9 | 15 | 4 | 13 |

Intéressons-nous au cycle qui débute à la case 1

* Le contenu de la case 1 de la situation d’origine est placé en case 14 de la situation finale
* Le contenu de la case 14 de la situation d’origine est placé en case 4 de la situation finale
* Le contenu de la case 4 de la situation d’origine est placé en case 10 de la situation finale
* Le contenu de la case 10 de la situation d’origine est placé en case 1 de la situation finale

Et voilà le cycle (1, 14, 4, 10)

J’ai coloré d’une autre couleur ce nouveau cycle, qui concerne des cases différentes du premier cycle.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 0 | 6 | 5 | 12 | 1 | 11 | 9 | 15 | 4 | 13 |

La case 2 débute un cycle particulier : celui-ci ne concerne qu’une seule case : (2)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 0 | 6 | 5 | 12 | 1 | 11 | 9 | 15 | 4 | 13 |

La case 11 est aussi le début d’un cycle de longueur 1, puis deux autres cycles de longueur 2 et la coloration est complète.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 0 | 6 | 5 | 12 | 1 | 11 | 9 | 15 | 4 | 13 |

Cette permutation complexe a été décomposée en cycles, ce qu’on peut décrire de manière suivante :

(0, 8, 5, 3, 7, 6) (1, 14, 4, 10) (2) (11) (9, 12) (13, 15)

Plusieurs remarques :

* Un point fixe est un cycle de longueur 1
* Une transposition est un cycle de longueur 2
* Cette décomposition a mis en évidence des cycles deux à deux disjoints
* Chaque cycle pourrait démarrer par n’importe quelle case le composant. En fait il s’agit toujours du même cycle, seule sa représentation varie.

Cependant

* L’ensemble des cycles de la décomposition est unique
* On peut appliquer les cycles dans l’ordre voulu (commutativité entre cycles disjoints)

## Décomposition d’un cycle en transpositions

Prenons la permutation formée du seul cycle (0, 8, 5, 3, 7, 6) impliquant 6 cases.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 1 | 2 | 7 | 4 | 3 | 0 | 6 | 5 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Si sur la situation initiale on applique d’abord la transposition (0, 8) :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

il reste alors à exécuter la permutation suivante pour réaliser la permutation d’origine.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Transposition | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Nouvelle Permutation | 5 | 1 | 2 | 7 | 4 | 3 | 0 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Permutation finale | 8 | 1 | 2 | 7 | 4 | 3 | 0 | 6 | 5 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Or cette nouvelle permutation est le cycle (0, 5, 3, 7, 6)

Donc (0, 8, 5, 3, 7, 6) = (0, 8) suivi de (0, 5, 3, 7, 6)

Un cycle de longueur 6 a été décomposé en une transposition suivie d’un nouveau cycle de longueur 5.

En recommençant sur ce nouveau cycle, on aboutit à une nouvelle décomposition, et puisque la longueur du nouveau cycle décroit strictement, on finit par une décomposition (non commutative) de transpositions.

On note ° l’opération « suivi de » :

(0, 8, 5, 3, 7, 6) = (0, 8) ° (0, 5, 3, 7, 6)

= (0, 8) ° (0, 5) ° (0, 3, 7, 6)

= (0, 8) ° (0, 5) ° (0, 3) ° (0, 7, 6)

= (0, 8) ° (0, 5) ° (0, 3) ° (0, 7) ° (0, 6)

Il n’y a pas qu’une seule manière de décomposer un cycle en transpositions.

## Décomposition d’une permutation quelconque en transpositions

Pour une permutation quelconque, formée de plusieurs cycles disjoints, on peut ainsi décomposer chacun des cycles en transpositions, et on obtient que toute permutation peut être décomposée en une succession de transpositions.

Cette décomposition n’est pas unique. On n’est même pas obligé d’effectuer les décompositions des cycles initiaux. On peut introduire une transposition de deux cases appartenant à des cycles distincts. Ceux-ci disparaissent, au profit d’une décomposition en nouveaux cycles, eux-mêmes décomposables en transpositions.

Mais on démontre que toutes les décompositions en transpositions d’une permutation donnée ont même parité : le nombre de transpositions obtenues est soit toujours pair, soit toujours impair.

Quelques éléments de preuve :

La décomposition canonique d’un cycle de longueur *l* fait apparaitre *l-1* transpositions.

* Un point fixe se résume à 0 transpositions
* Une transposition se résume évidemment à une seule transposition, elle-même
* Quand on décompose un cycle plus long, on s’arrête lorsque le cycle généré est une transposition.

Donc si la permutation de *n* cases est composée de *c* cycles *c*0, *c*1, …, *c*c-1 de longueurs respectives *l*0, *l*1, …, *l*c-1, la décomposition canonique de cette permutation donnera *n-c* transpositions.

Remarque :

Mais si on effectue une transposition entre deux cycles de longueurs *c*1 et *c*2, on fait disparaitre ceux-ci au profit d’un cycle de longueur *c*3 = *c*1+*c*2

Et si on termine la décomposition canonique avec ce nouveau cycle remplaçant les deux premiers, et qu’on fait le bilan du nombre de transpositions obtenues, on obtient :

1 + (*l*3 – 1) – (*l*2 – 1) – (*l*1 – 1) = 2 : réunir ces cycles par une transposition a fait ajouter 2 transpositions au bilan final du nombre de transpositions obtenues pour la décomposition de la permutation.

## Permutation inverse

Appelons ρ une permutation donnée, qui permet d’obtenir un arrangement d’un tableau en un autre tableau. On note ρ-1 la permutation inverse qui permet de retrouver le tableau initial à partir du tableau final obtenu par ρ .

Si la permutation est une transposition τ = (c1, c2), sa permutation inverse est elle-même :

τ-1 = τ = (c1, c2) = (c2, c1)

Si on a décomposé une permutation quelconque ρ en transpositions :

ρ = τ0 ° τ1 ° … ° τl-1

On obtient aisément une décomposition en transpositions de la permutation inverse ρ-1

Il suffit d’appliquer les transpositions dans le sens inverse.

ρ-1 = τl-1 ° … ° τ1 ° τ0

# Propriétés

## Potentiel de jeu

Pour une taille N = L\*H, il y a N!=∏ i=1 to N i = 1\*2\*…\*N dispositions possibles des pièces (hors contraintes de mouvement).

Par exemple, pour un tableau de 4\*4 cases, il y a 16! = 20 922 789 888 000 possibilités.

Pour autant, on va voir qu’il n’existe que positions initiales résolubles. Ce qui est déjà conséquent.

## Promenade

Chaque mouvement est une transposition impliquant la case vide V.

On appelle voisin d’une pièce P toute case de P par le côté, qui évidemment se trouve dans la grille.

On se focalise sur une pièce P qu’on veut déplacer, sans se préoccuper des mouvements des autres pièces, sauf V, évidemment.

Dans une grille au minimum 2x2, on peut toujours amener V sur un voisin de P, sans déplacer P.

Maintenant que V est à côté de P, les transposer fait déplacer P d’une case (ainsi que V qui prend la place de P).

Et, en « contournant » P, on peut ramener V sur un autre voisin de P.

Et les transposer à nouveau.

Ainsi, on peut par ces opérations successives amener P dans n’importe quelle case choisie arbitrairement.

Bien sûr cela ne conserve pas la position des autres pièces.

## Promenade circulaire

Traçons à partir de V un chemin passant les voisines successives, sans croisements, en rebouclant sur V.

Soit P le nombre de pièces (y compris V) que forme ce chemin.

On peut par transpositions successives venir placer V sur chaque position de ce chemin. Et si on effectue P transpositions sans jamais revenir en arrière, V retrouve sa position d’origine. Et les autres pièces ? elles ont subi une permutation cyclique de 1 case dans le sens inverse du parcours de V, en épargnant V.

Illustration :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | 4 | 5 | 6 |  |  | 4 | 5 | 6 |  |  | 4 | 5 | 6 |  |  | 4 | 5 | 6 |  |  | V | 5 | 6 | |  | 3 |  | 7 |  |  | 3 |  | 7 |  |  | 3 |  | 7 |  |  | V |  | 7 |  |  | 4 |  | 7 | |  | 2 | 1 | V |  |  | 2 | V | 1 |  |  | V | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | 1 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | 5 | V | 6 |  |  | 5 | 6 | V |  |  | 5 | 6 | 7 |  |  | 5 | 6 | 7 | |  |  |  |  |  |  | 4 |  | 7 |  |  | 4 |  | 7 |  |  | 4 |  | V |  |  | 4 |  | 1 | |  |  |  |  |  |  | 3 | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | V | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |

En résumé :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | 4 | 5 | 6 | |  | 3 |  | 7 | |  | 2 | 1 | V | |  |  |  |  | | 🡺 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | 5 | 6 | 7 | |  | 4 |  | 1 | |  | 3 | 2 | V | |  |  |  |  | |

Ainsi on voit que dans une grille 2x2, ou dans une portion 2x2 d’une grille, contenant la case V, les seules dispositions possibles des 4 pièces pour une position V donnée sont les 3 permutations cycliques des 3 autres pièces.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 1 | 2 |  | 3 | 1 |  | 2 | 3 | | 3 | V |  | 2 | V |  | 1 | V | |

Et donc puisque par la suite, on peut placer V dans chacune des autres cases, on obtient 3\*4 = 12 dispositions.

Or, en dehors de toute contrainte de mouvements, il existe 4! = 24 dispositions possibles de ces 4 pièces.

Il reste à vérifier qu’aucune disposition ainsi obtenue n’est en doublon, ce qui est vrai pour les 3 premières, et l’est encore pour les autres de chacune des trois premières puisqu’une rotation autour du centre de la grille 2x2 ramène à une des deux autres positions d’origine.

C’est là qu’on voit clairement apparaitre que toutes les positions initiales ne sont pas résolubles uniquement par des transpositions impliquant V.

## Confinement

Le cas de déplacement le plus compliqué qu’on puisse rencontrer va se produire dans des grilles 2x3, ou 3x2, ou des portions de cette proportion dans des grilles plus grandes.

Imaginons qu’on ait à placer A et B dans ces positions finales, mais sans perturber les contenus des cases colorées :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | A | B | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |

On ne peut pas se contenter de placer d’abord A en position finale, puis d’amener B à sa position finale.

En effet, dans cette stratégie, à un moment, on va vouloir se retrouver dans la situation suivante pour basculer définitivement B dans sa case finale, alors que A est déjà placé :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | A | V | |  |  | B | |  |  |  | |  |  |  | |

Or pour amener V au-dessus de B, il faut passer par A. Et donc déloger A.

Dans un environnement moins confiné, on serait passé par la droite de B, sans gêner A.

Pour arriver à notre fin, il va falloir placer les deux pièces simultanément dans leurs positions finales.

On s’arrange pour arriver à cette position-là :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | V | A | |  |  | B | |  |  |  | |  |  |  | |

Puis en deux transpositions de V, on arrive à notre fin, et V est ensuite en capacité de se mouvoir sans plus perturber ni A ni B.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | A | B | |  |  | V | |  |  |  | |  |  |  | |

Evidemment ça fonctionne aussi dans d’autres positions initiales :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | B | V | |  | A |  | |  |  |  | |  |  |  | | 🡺 | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | A | B | |  | V |  | |  |  |  | |  |  |  | |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  | | A | B |  | | V |  |  | | 🡺 | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  | | B | V |  | | A |  |  | |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  | | V |  |  | | B | A |  | | 🡺 | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  | | B |  |  | | A | V |  | |

Peut-on toujours amener A à la position finale de B, puis B à coté de A, puis V à la position finale de A, pour enfin basculer A et B dans leurs positions finales. Oui mais ça demande parfois un peu de précision.

Evidemment, tout ce qui est dit ici reste vrai en intervertissant les rôles de A et B. Et on raisonne dans le cadre d’un rectangle 2x3, on peut tout transposer par symétrie oblique à un rectangle 3x2.

En général, B est suffisamment écarté pour ne pas gêner la manœuvre sur A : il suffit que B ne soit pas, ou ne vienne pas, en 1ère ou 2ième ligne. Si ce n’est pas le cas, on écarte d’abord B avant de s’occuper de A.

Le cas le plus compliqué est rencontré quand, dans un résultat non attendu d’autres déplacements, on se retrouve dans la situation suivante :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | B | A | |  | V |  | |  |  |  | |  |  |  | |

Il faut au minimum 17 mouvements pour intervertir A et B

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | B | A |  | V | A |  | A | V |  | A |  |  | A |  |  | A |  |  | A |  |  | A |  |  | A | V | | V |  |  | B |  |  | B |  |  | B | V |  | B |  |  | B |  |  | V |  |  |  | V |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | V |  | V |  |  | B |  |  | B |  |  | B |  | |
|  |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | V | A |  |  | A |  |  | A |  |  | A |  |  | A |  |  | A |  | V | A |  | A | V |  | A | B | |  |  |  | V |  |  | B |  |  | B |  |  | B | V |  | V | B |  |  | B |  |  | B |  |  | V | | B |  |  | B |  |  | V |  |  |  | V |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |

On éloigne B, ce qui oblige à faire passer A par sa position finale, puis on vient replacer A en position finale de B, et on va chercher B pour le placer sous sa position finale occupée par A.

Et enfin, on vient se placer à coté de A, et on finit le placement simultané de A et B.

# Rangement

On voit donc un algorithme susceptible de résoudre une situation initiale.

Dans une grille LxH d’au moins 3x3

Les colonnes sont numérotées de 0 à L-1 de gauche à droite

Les lignes sont numérotées de 0 à H-1 de haut en bas

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ranger individuellement les pièces à leur emplacement dans la rangée du haut, de gauche à droite, jusqu’à la colonne L-3 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |
| Puis placer simultanément les pièces des cases (0, L-2) et (0, L-3) en fin de ligne. | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |
| On recommence avec la ligne suivante, jusqu’à la ligne H-4. | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |
| En ligne H-3, on effectue le rangement dans le même ordre, mais à chaque pièce rangée, on fait succéder, avant de traiter la pièce suivante à droite, le rangement simultané des deux pièces situées sous celle-ci.  Quand on arrive à la colonne L-3, après rangement des deux pièces en fin de colonne, on range les deux pièces en fin de ligne H-3 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |
| Il reste à ranger ce dernier carré en bas à droite par des permutations de V à l’intérieur de ce carré, jusqu’à placer V et la pièce qui doit prendre sa place à gauche de V, que j’ai appelée ici Z. | |  |  | | --- | --- | |  |  | | Z | V | |

On sait déjà que dans ce carré final, il suffit d’un nombre adéquat de transpositions de V avec ses voisines pour atteindre cette position.

Il reste à observer les deux pièces au-dessus de celles-ci pour constater si oui ou non elles sont à leur emplacement définitif et donc si oui ou non la situation initiale était résoluble.

# Evaluation

Mais avant de se lancer dans le rangement d’une grille donnée, il serait bon de pouvoir rapidement évaluer si cette grille peut ou non être rangée, et, pourquoi pas, quelle opération minimale faut-il faire pour passer d’une configuration non résoluble à une configuration résoluble.

## Résolubilité

La méthode de résolution proposée aboutit au rangement explicite de toutes les pièces, sauf deux, celles situées au-dessus et au-dessus à gauche de la case vide dans son emplacement final : le coin en bas à droite.

|  |  |
| --- | --- |
| X | Y |
| Z | V |

Si à la fin du rangement, les pièces X et Y sont dans leur emplacement définitif, le puzzle est résolu et donc était résoluble.

Plaçons-nous dans le cas d’un puzzle non résoluble. En tentant de le résoudre, on aboutit donc au rangement de toutes les pièces (dont la pièce vide) sauf des deux pièces X et Y qui sont interverties, transposées :

|  |  |
| --- | --- |
| Y | X |
| Z | V |

Imaginons qu’on les ait transposées dès le départ.

Puisqu’elles ne sont jamais intervenues explicitement dans un quelconque mouvement de classement, partout où sera apparu X dans le rangement de la situation non résoluble, sera apparu Y dans le rangement de la situation, et vice-versa.

Donc aussi dans le carré final.

Intervertir ces deux pièces dès le départ rend résoluble une situation non résoluble. Et vice-versa.

Mais peut-on le faire avec n’importe quelle paire de pièces ? N’importe quelle paire de pièces non vides.

La méthode de rangement décrite nous permet d’envisager d’autres manipulations. Partons d’une situation non résoluble de taille minimale 2x3, et rangeons les pièces ainsi :

|  |  |
| --- | --- |
| X | Y |
| A | V |
|  |  |

On a vu dans le rangement de fin de ligne qu’il était toujours possible de placer deux pièces non rangées en fin de ligne. Puis on peut amener A sous Y et V sous X.

Appelons σ la suite des transpositions de V qui ont pu établir cette position.

Si on veut rendre la situation résoluble, on doit artificiellement intervertir X et Y.

Mais intervertissons plutôt A et X.

|  |  |
| --- | --- |
| A | Y |
| X | V |
|  |  |

Puis avec 4 transpositions successives de V, donc avec des mouvements autorisés, dans ce carré supérieur, on peut amener les pièces à cette disposition :

|  |  |
| --- | --- |
| Y | X |
| A | V |
|  |  |

Appelons τ cette succession de transpositions

On voit que maintenant, ce sont bien Y et X qu’on a transposés artificiellement.

Donc la transposition de A et X est équivalente à celle de X et Y.

Donc en théorie :

* On applique σ pour amener les pièces A, X, Y dans la position préalable à l’échange
* On échange A et X
* On applique τ
* Puis on applique σ-1
* On a bien la situation initiale dans laquelle on a simplement échangé X et Y

Conclusion : échanger A et X revient au même que d’échanger X et Y.

Et avec A et B non vides ?

Dans une situation non résoluble de taille minimale 2x3, nous amenons X, Y, A, B, C et V dans l’une des deux positions suivantes :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | X | Y | | A | V | | B | C | | ou | |  |  | | --- | --- | | X | Y | | A | V | | C | B | |

Echanger A et X rend la situation résoluble :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | A | Y | | X | V | | B | C | | ou | |  |  | | --- | --- | | A | Y | | X | V | | C | B | |

Il reste à montrer que par une série de déplacements autorisés, on arrive à la situation suivante :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | X | Y | | B | V | | A | C | | ou | |  |  | | --- | --- | | X | Y | | B | V | | C | A | |

A partir de la première position :

|  |  |
| --- | --- |
| A | Y |
| X | V |
| B | C |

Exécutons 16 mouvements autorisés

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | A | Y |  | A | Y |  | A | Y |  | V | Y |  | Y | V |  | Y | C |  | Y | C |  | Y | C | | X | C |  | X | C |  | V | C |  | A | C |  | A | C |  | A | V |  | V | A |  | X | A | | B | V |  | V | B |  | X | B |  | X | B |  | X | B |  | X | B |  | X | B |  | V | B | |
|  |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Y | C |  | Y | C |  | Y | V |  | V | Y |  | X | Y |  | X | Y |  | X | Y |  | X | Y | | X | A |  | X | V |  | X | C |  | X | C |  | V | C |  | B | C |  | B | C |  | B | V | | B | V |  | B | A |  | B | A |  | B | A |  | B | A |  | V | A |  | A | V |  | A | C | |

Pour arriver au résultat souhaité

A partir de la seconde position :

|  |  |
| --- | --- |
| A | Y |
| X | V |
| C | B |

Exécutons 15 mouvements autorisés

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | A | Y |  | A | Y |  | A | Y |  | V | Y |  | Y | V |  | Y | B |  | Y | B |  | Y | B | | X | B |  | X | B |  | V | B |  | A | B |  | A | B |  | A | V |  | V | A |  | X | A | | C | V |  | V | C |  | X | C |  | X | C |  | X | C |  | X | C |  | X | C |  | V | C | |
|  |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Y | B |  | Y | B |  | Y | V |  | V | Y |  | X | Y |  | X | Y | | X | A |  | X | V |  | X | B |  | X | B |  | V | B |  | B | V | | C | V |  | C | A |  | C | A |  | C | A |  | C | A |  | C | A | |

Conclusion : échanger deux pièces quelconques non vides fait basculer une situation non résoluble en situation résoluble, et vice-versa.

Appliquons alors cette règle à une situation inconnue, où la pièce vide est déjà en situation :

nbT=0

Pour chaque pièce p de 0 à NbCases-3

Soit sa position actuelle a

Si a != p

Transposer p et la pièce en a

++nbT

Si à la fin nbT est pair, la situation est résoluble. S’il est impair, la situation n’est pas résoluble.

Il reste à traiter le cas où V n’est pas en position.

Dans une copie de la situation d’origine, amenons V par des mouvements légaux à sa position définitive, et effectuons le test sur cette situation modifiée.

## Rendre résoluble

Avec les notations précédentes, puisque A et B ne font pas l’objet d’un placement explicite, si on intervertit dès le départ A et B, on obtiendra un carré final rangé.

# Placement

Comment automatiser les déplacements des pièces sans produire un algorithme complexe ?

Pour le rangement d’une pièce, les contraintes sont les suivantes :

Soit A la pièce d’indice a

* Respecter les pièces déjà rangées, d’indices 0 à r (r = a-1, sauf dans les algorithmes de rangement de fin de ligne et fin de colonne)
* Ne pas sortir du tableau
* Déplacer la pièce A vers sa case d’indice a.

Pour approcher A de sa case, il faut déplacer V pour la placer entre A et sa case, voisine de A, puis switcher A et V, et recommencer

L’algorithme est donc

Tant que A n’est pas en case a

Amener V contre A en choisissant le voisin pour rapprocher A de sa case a

Switcher A et V

Fin tant que

Comment se fait le choix du voisin parmi les 4 possibles ?

* Il doit être dans la grille
* Il ne doit pas être dans la zone des pièces déjà rangées
* Sa distance à a est la plus faible

On mesure la distance dite de « Manhattan ».

Si plusieurs possibilités semblent équivalentes, on les conserve toutes, car la meilleure peut dépendre de l’environnement (emplacement de V, cases libres)

Comment déplacer V pour l’amener contre A ?

On génère tous les chemins en privilégiant ceux approchant V de sa destination, sans sortir de la grille, sans empiéter sur les pièces déjà rangées, sans passer par A.

Un chemin est une liste chainée de plateaux intermédiaires, chacun (sauf le premier) enregistrant le mouvement qui y a mené

Hashset plateauxRencontres

List PlateauxAtester

plateauxRencontres.add(plateauactuel)

PlateauxAtester.add(plateauactuel)

Solution = null

Boucle

Si plateauxatester est vide

Throw new applicationexception // une solution doit exister

Fin si

Prendre de plateauxatester le plateau P le plus prometteur

Générer les plateaux P’ accessibles depuis P

Si P’ déjà dans plateauxrencontres, continuer

Si P’ solution

Solution = P’

Break

Fin si

Ajouter P’ à plateauxRencontres

Insérer P’ dans PlateauxAtester avec évaluation de sa pertinence

Fin Boucle

Si solution == null

Throw exception

Fin si

List mvts

Tant que solution != null

Mvts.add solution.mvt

Solution = solution.parent

Fin tant que

Mvts.reverse

Pour chaque Mvt de mvts

Effectuer le switch de Vide selon ce Mvt

Fin pour

# Rangement de début de ligne

Nous voulons ranger la pièce d’indice P, de case de rangement F de coordonnées (xf,yf), actuellement en position posP, de coordonnées coordP = (xp  yp)

Nous nous imposons les limitations suivantes :

* xf ≤ L-3, yf ≤ H-3 (il y a au moins deux colonnes à droite, deux lignes sous F.
* Pour tout (x,y) tel que y<yf, la case (x,y) contient sa pièce rangée (les lignes au-dessus de l’emplacement définitif de P sont rangées)
* Pour tout (x,y) tel que x<xf et y==yf, , la case (x,y) contient sa pièce rangée (les cases à gauche de l’emplacement définitif de de P sont rangées)
* Evidemment, ni P ni V ne sont dans ces lignes et cases déjà rangées (bien qu’elles puissent être fortuitement dans leur rangement)

Si P est déjà en F, il n’y a rien à faire

Sinon il est toujours possible d’amener V sur un voisin de P qui ne soit pas dans ces cases rangées, sans perturber ni P ni ces cases rangées, et tel que le voisin de P choisi soit plus proche de F que P :

Si P est dans la colonne de F, P est nécessairement sous F, on peut amener V au-dessus de P, passant au besoin par sa droite (.

Sinon, on peut amener V à droite ou à gauche de P dans une colonne plus proche de (voire confondue avec) la colonne de F.

En transposant P et V, on a rapproché P de F, sans avoir bougé aucune des pièces déjà rangées.

En répétant l’opération, la distance diminuant constamment, on finit par amener P en F.

Il faut maintenant passer à la case à droite de F et venir y ranger sa pièce, jusqu’à la colonne H-3 comprise.

# Rangement de fin de ligne

## Première approche

Maintenant qu’il reste deux cases en fin de ligne à ranger, voici comment on peut procéder :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Soient A et B à ranger respectivement en (L-2, yf), (L-1, yf) | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | L-2 | L-1 | | yf | A | B | |  |  |  | |  |  |  | |
| On choisit d’amener soit B en (L-1, yf), soit A en (L-2, yf)  Pour faire ce choix, on peut choisir celui où la distance est moindre.  Puis on amène l’autre pièce sous la première.  Puis on amène V à côté de la première (il ne reste qu’un voisin libre) | |  |  | | --- | --- | | V | A | |  | B | |  |  | |
| Et en deux mouvements de V, on a placé les deux pièces simultanément. | |  |  | | --- | --- | | A | B | |  | V | |  |  | |
| Mais amener B sous A en L-1, ou A sous B en L-2 peut s’avérer compliqué. Par exemple : | |  |  | | --- | --- | | B | A | |  |  | |  |  | |
| Ou encore  (ou d’autres positions semblables) | |  |  | | --- | --- | |  | V | | B | A | |  |  | |

## Deuxième approche

Il semble qu’il y ait de nombreux cas particuliers. Il existe toujours la méthode gros bourrin, placer la pièce A suffisamment éloignée de B, placer l’autre pièce B près de sa destination, rapatrier A, ajuster les deux dans leurs logements définitifs. Il y a une autre méthode bourrin : amener A, B et V dans le rectangle 2x3, utiliser un calcul exhaustif (voire un pré-calcul, puisque les cas sont limités, surtout si on prend en compte les symétries) de toutes les situations possibles pour enchainer les mouvements adéquats. On peut faire ça aussi pour le carré final. Mais il semble là aussi qu’on n’échappe pas aux cas tordus : il faut déjà amener les trois dans le rectangle, et dans certains cas, c’est pas gagné.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| L’objectif est de placer les deux pièces A et B dans cet ordre dans le rectangle en haut à droite d’une ligne donnée : | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | A | B | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |
| Il faut déjà amener les trois pièces, A, B, V, dans ce rectangle, ce qui peut déjà poser des problèmes : une solution est de contourner A pour venir se mettre au-dessus de lui. | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | A | B | |  |  |  |  |  |  | V | |
| 5 mouvements sont ainsi nécessaires. Mais est-ce la solution la plus efficace ? | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | V |  | |  |  |  |  |  | A | B | |  |  |  |  |  |  |  | |
| On pourrait choisir de baisser B hors du 2x3, puis d’amener A en haut à droite du 2x3, puis B sous A. Et enfin placer A et B. |  |

On peut raisonnablement élargir la zone de placement automatique.

Pour générer toutes les situations, tout en assurant un chemin minimal pour les résoudre, partons de la situation solution et travaillons sur les situations qui en découlent, en privilégiant les chemins les plus courts et en gérant la redondance. Seules les pièces A, B et V sont impliquées.

## Troisième approche

On considère une zone de placement automatique 2x3 pour une fin de ligne ou 3x2 pour une fin de colonne. L’explication ci-dessous se place dans l’optique d’une fin de ligne.

Si aucune des deux pièces A ou B n’est dans la zone

* On choisit l’une des deux pièces, par exemple celle la plus proche de la destination de l’autre, disons A.
* On place A en case définitive de B, sans craindre de bouger B au passage, qui reste hors zone
* On ramène B sous A
* On finit de placer les deux simultanément

Si au plus une des deux pièces A ou B est dans la zone de placement automatique 2x3, par exemple A

* On place A en case définitive de B, sans craindre de bouger B au passage, qui reste hors zone
* On ramène B sous A
* On finit de placer les deux simultanément

Si A et B sont dans la zone, mais pas V,

* On amène V dans la zone par le plus court chemin, sans craindre de déplacer A ou B.
* Une fois cela fait, on peut se retrouver
  + avec A et B toujours dans la zone,
  + ou seulement l’une des deux car on en aura chassé l’autre.

Si les 3 sont dans la zone on identifie la situation avec l’une de celles précalculées, et on applique les mouvements enregistrés.

## Précalcul des résolutions

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| On part des deux solutions possibles : ce sont les deux premières situations à évaluer. Ici celles d’une fin de ligne. | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | A | B |  | A | B | | V |  |  |  | V | |  |  |  |  |  | |

On déplace V sur chaque voisin de A ou B disponible dans la zone, même si l’autre bouge dans l’opération, car elle reste dans la zone.

On permute

On ignore la position obtenue si elle a déjà été rencontrée

Sinon on enregistre la situation avec un lien sur la situation parent et le nombre total de mouvements qui ont été nécessaires (somme de celui nécessaire au parent et de celui nécessaire au déplacement de V et de sa permutation)

On choisit une situation non encore évaluée dont le chemin est parmi les plus courts, on recommence.

# Rangement de fin de colonne

Symétrique au rangement de fin de ligne

# Rangement du dernier carré

Partant d’une situation donnée et appliquant des mouvements soit dans le sens horaire, soit dans le sens anti-horaire, on aboutit finalement à la position rangée.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| horaire | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| V | C |  | C | V |  | C | A |  | C | A |  | V | A |  | A | V |  | A | B |
| B | A |  | B | A |  | B | V |  | V | B |  | C | B |  | C | B |  | C | V |
| anti-horaire | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| V | C |  | B | C |  | B | C |  | B | V |  | V | B |  | A | B |  | A | B |
| B | A |  | V | A |  | A | V |  | A | C |  | A | C |  | V | C |  | C | V |

Il suffit de tester deux des 4 cases pour repérer combien de mouvements il faut effectuer, et dans quel sens.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | C |  | 6 horaire | V |  |  | 2 horaire | V |  |  | 2 anti-horaire |
| B | A |  |  |  | B |  |  |  | C |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | V |  | 5 horaire |  | V |  | 1 horaire |  | V |  | 3 anti-horaire |
|  | A |  |  |  | B |  |  |  | C |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 5 anti-horaire |  |  |  | 3 horaire |  |  |  | 1 anti-horaire |
| V | A |  |  | V | B |  |  | V | C |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| A |  |  | résolu | B |  |  | 4 anti-horaire | C |  |  | 4 horaire |
|  | V |  |  |  | V |  |  |  | V |  |  |