Le taquin

# Présentation

Jeu en solitaire. Une grille de N cases, de largeur L cases, de hauteur H cases, sur laquelle peuvent se déplacer d’une case à l’autre des pièces numérotées de 1 à N.

Les pièces peuvent montrer une partie d’une image, mais le principe reste le même : il faut réorganiser les pièces de manière à les reclasser.

* Les seuls mouvements autorisés impliquent la pièce n° N : elle peut permuter avec une de ses voisines par un coté (les voisines d’angle sont exclues).

|  |  |
| --- | --- |
|  | Techniquement, la pièce N n’est pas sur la grille, laissant un trou dans lequel on peut glisser justement l’une des voisines du trou. Le trou prend alors la place de la voisine.  C’est pourquoi on appelle cette pièce N la case vide. On la note souvent V.  Remarque : on pourrait envisager une variante où la case vide n’est pas la dernière, mais peut être n’importe laquelle des N pièces. |

# Objectif

Mettre au point un algorithme de résolubilité, un algorithme de résolution.

En effet, on va voir que toutes les positions initiales ne sont pas résolubles.

Si on a le second algorithme, il peut servir à tester si une disposition initiale est résoluble. Mais on peut aussi envisager un algorithme qui évalue cette résolubilité sans résoudre explicitement le jeu, de manière plus efficace.

# Un peu de vocabulaire (et de théorie)

## Permutations

* Dans une suite ordonnée d’objets (ici nos pièces, la pièce vide comprise), mélanger cette suite s’appelle une permutation.
* Si une permutation ne concerne exactement que deux pièces distinctes, on l’appelle une transposition.
* Dans une permutation, les objets qui ne changent pas de place s’appellent des points fixes.

Exemple, ordonnons les 16 pièces d’un puzzle 4x4 de gauche à droite en partant du haut, et présentons ces pièces numérotées de 0 à 15 sur une seule ligne :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Cette représentation correspond au puzzle rangé :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 0 | 1 | 2 | 3 | | 4 | 5 | 6 | 7 | | 8 | 9 | 10 | 11 | | 12 | 13 | 14 | 15 | |

La case 15 étant la case « vide »

Si on mélange ce puzzle (hors de toute considération de validité des mouvements effectués), on peut obtenir le puzzle mélangé suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 6 | 10 | 2 | 5 |
| 14 | 8 | 7 | 3 |
| 0 | 12 | 4 | 11 |
| 9 | 15 | 1 | 13 |

Chaque n° de pièce est présent une et une seule fois dans ce tableau mélangé (une permutation -sur un ensemble fini- est en fait une bijection, et toutes les bijections d’un ensemble sur lui-même sont des permutations).

Qu’on représente par cette suite :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 |

La permutation, elle, peut être uniquement décrite par les positions finales, sous-entendu que les positions initiales étaient rangées.

Dans notre cas :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 |

Décrit la permutation qui a mené la position rangée initiale à la position mélangée ci-dessus.

Mais dans le cas d’une position initiale non rangée, ce même tableau décrit les opérations à effectuer sur le contenu des cases de la situation d’origine pour remplir les cases d’une situation finale :

Le contenu de la case 0 de la situation d’origine est placé en case 6 de la situation finale

Le contenu de la case 1 de la situation d’origine est placé en case 10 de la situation finale

Le contenu de la case 2 de la situation d’origine est placé en case 2 de la situation finale

Le contenu de la case 3 de la situation d’origine est placé en case 5 de la situation finale

Etc.

Mais attention : il faut bien réaliser qu’on part d’une situation finale vide pour la remplir avec les opérations décrites ci-dessus. Il s’agit bien d’opérations d’un tableau initial vers un autre tableau.

* Cette description est appelée description directe de la permutation

Remarque : on aurait pu choisir la description inverse :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 0 | 6 | 5 | 9 | 1 | 11 | 9 | 13 | 4 | 13 |

Se lit ainsi :

Ce qui est en case 8 de la position finale vient de la case 0 de la position initiale

Ce qui est en case 14 de la position finale vient de la case 1 de la position initiale

Ce qui est en case 2 de la position finale vient de la case 2 de la position initiale

Ce qui est en case 7 de la position finale vient de la case 3 de la position initiale

Etc.

* Cette description est appelée description inverse de la permutation

Mais ce nouveau tableau peut s’interpréter comme une description directe d’une autre permutation.

Amusons-nous (car on est là pour s’amuser) à effectuer sur une position initiale d’abord la permutation directe de l’exemple dans une position puis la permutation directement décrite par la permutation inverse de l’exemple, dans une position  :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 | | 8 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 0 | 6 | 5 | 9 | 1 | 11 | 9 | 13 | 4 | 13 | |

Interprétation de cette **composition** de permutations données par leurs descriptions directes :

* Ce qui est en case 0 dans va en case 6 dans puis ce qui est en case 6 dans va en case 0 dans
* Ce qui est en case 1 dans va en case 10 dans puis ce qui est en case 10 dans va en case 1 dans
* Etc.

Au final, on obtient une permutation de vers qui est la permutation **Identité**, aucune case n’a vu son contenu modifié entre et .

* Permutation Identité : celle qui ne change le contenu d’aucune case.
* La description inverse d’une permutation est aussi la description directe de sa permutation inverse.
* Appliquer une permutation P puis sa permutation inverse revient à appliquer la permutation identité.
* Une transposition est sa propre permutation inverse (on les appelle involutives). Ce sont les seules involutions parmi les permutations.

## Cycle

* Un cycle est une permutation particulière : elle implique une liste de *l* cases c0, c1, …, cl-1, pour lesquelles
  + c1 dans le tableau final reçoit le contenu de c0 du tableau initial
  + c2 dans le tableau final reçoit le contenu de c1 du tableau initial
  + jusqu’à :
  + cl-1dans le tableau final reçoit le contenu de cl-2 du tableau initial
  + et enfin c0 dans le tableau final reçoit le contenu de cl-1 du tableau initial

Un exemple de description directe d’un cycle de 5 cases (mises en couleur ici)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8 | 1 | 2 | 3 | 7 | 5 | 6 | 12 | 4 | 9 | 10 | 11 | 0 | 13 | 14 | 15 |

La case 8 dans le tableau final reçoit le contenu de la case 0 du tableau initial

La case 4 dans le tableau final reçoit le contenu de la case 8 du tableau initial

La case 7 dans le tableau final reçoit le contenu de la case 4 du tableau initial

La case 12 dans le tableau final reçoit le contenu de la case 7 du tableau initial

La case 0 dans le tableau final reçoit le contenu de la case 12 du tableau initial

Et toutes les autres cases du tableau final reçoivent le contenu de la case de même indice du tableau initial.

On peut noter un tel cycle d’une manière synthétique :

(0, 8, 4, 7, 12)

Le contenu de la case 0 du tableau initial va en case 8 du tableau final

Le contenu de la case 8 du tableau initial va en case 4 du tableau final

Le contenu de la case 4 du tableau initial va en case 7 du tableau final

Le contenu de la case 7 du tableau initial va en case 12 du tableau final

Le contenu de la case 12 du tableau initial va en case 0 du tableau final

Le contenu des autres cases du tableau final reçoivent le contenu de la case de même indice du tableau initial.

## Décomposition en cycles

Reprenons notre exemple de permutation

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 |

* Le contenu de la case 0 de la situation d’origine est placé en case 6 de la situation finale

Mais plutôt que de décrire où va le contenu de la case 1, intéressons-nous au contenu de la case 6

* Le contenu de la case 6 de la situation d’origine est placé en case 7 de la situation finale

Et on continue avec la case 7

* Le contenu de la case 7 de la situation d’origine est placé en case 3 de la situation finale
* Le contenu de la case 3 de la situation d’origine est placé en case 5 de la situation finale
* Le contenu de la case 5 de la situation d’origine est placé en case 8 de la situation finale
* Le contenu de la case 8 de la situation d’origine est placé en case 0 de la situation finale

On vient de décrire un cycle :

(0, 6, 7, 3, 5, 8)

J’ai coloré les cases de ce cycle

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 |

Intéressons-nous au cycle qui débute à la case 1

* Le contenu de la case 1 de la situation d’origine est placé en case 10 de la situation finale
* Le contenu de la case 10 de la situation d’origine est placé en case 4 de la situation finale
* Le contenu de la case 4 de la situation d’origine est placé en case 14 de la situation finale
* Le contenu de la case 14 de la situation d’origine est placé en case 1 de la situation finale

Et voilà le cycle (1, 10, 4, 14)

J’ai coloré d’une autre couleur ce nouveau cycle, qui concerne des cases différentes du premier cycle.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 |

La case 2 débute un cycle particulier : celui-ci ne concerne qu’une seule case : (2)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 |

La case 11 est aussi le début d’un cycle de longueur 1, puis deux autres cycles de longueur 2 et la coloration est complète.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 14 | 8 | 7 | 3 | 0 | 12 | 4 | 11 | 9 | 15 | 1 | 13 |

Cette permutation complexe a été décomposée en cycles, ce qu’on peut décrire de manière suivante :

(0, 6, 7, 3, 5, 8) (1, 10, 4, 14) (2) (11) (9, 12) (13, 15)

Plusieurs remarques :

* Un point fixe est un cycle de longueur 1
* Une transposition est un cycle de longueur 2
* Cette décomposition a mis en évidence des cycles deux à deux disjoints
* Chaque cycle pourrait démarrer par n’importe quelle case le composant. En fait il s’agit toujours du même cycle, seule sa représentation varie.
* L’ordre dans lequel les cycles sont exécutés est sans importance (commutativité)

Par contre

* L’ensemble des cycles de la décomposition est unique
* On peut appliquer les cycles dans l’ordre voulu (commutativité)

## Décomposition d’un cycle en transpositions

Prenons la permutation formée du seul cycle (0, 6, 7, 3, 5, 8)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 1 | 2 | 5 | 4 | 8 | 7 | 3 | 0 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Si sur la situation initiale on applique d’abord la transposition (0,6), il reste une permutation formée du seul cycle (3, 5, 8, 0, 7)

Donc (0, 6, 7, 3, 5, 8) = (0, 6) (3, 5, 8, 0, 7)

Un cycle de longueur *l* a été décomposé en une transposition suivie d’un nouveau cycle de longueur *l-1*.

En recommençant sur ce nouveau cycle, on aboutit à une nouvelle décomposition, et puisque la longueur du nouveau cycle décroit strictement, on finit par une décomposition (non commutative) de transpositions.

## Décomposition d’une permutation quelconque en transpositions

Pour une permutation quelconque, formée de plusieurs cycles, on peut ainsi décomposer chacun en transpositions, et on obtient que toute permutation peut être décomposée en transpositions.

Cette décomposition n’est pas unique. On n’est même pas obligé d’effectuer les décompositions des cycles initiaux. On peut introduire une transposition de deux cases appartenant à des cycles distincts. Ceux-ci disparaissent, au profit d’une décomposition en nouveaux cycles.

Mais on démontre que le nombre de transpositions d’une permutation donnée a une parité constante.

Quelques éléments de preuve :

La décomposition canonique d’un cycle de longueur *l* fait apparaitre *l-1* transpositions.

* Un point fixe se résume à 0 transpositions
* Une transposition se résume évidemment à une seule transposition, elle-même
* Quand on décompose un cycle plus long, on s’arrête lorsque le cycle généré est une transposition.

Donc si la permutation de *n* cases est composée de *c* cycles *c*0, *c*1, …, *c*c-1 de longueurs respectives *l*0, *l*1, …, *l*c-1, la décomposition canonique de cette permutation donnera *n-c* transpositions.

Remarque :

Mais si on effectue une transposition entre deux cycles de longueurs *c*1 et *c*2, on fait disparaitre ceux-ci au profit d’un cycle de longueur *c*3 = *c*1+*c*2

Et si on termine la décomposition canonique avec ce nouveau cycle remplaçant les deux premiers, et qu’on fait le bilan du nombre de transpositions obtenues, on obtient :

1 + (*l*3 – 1) – (*l*2 – 1) – (*l*1 – 1) = 2 : réunir ces cycles par une transposition a fait ajouter 2 transpositions au bilan final du nombre de transpositions obtenues pour la décomposition de la permutation.

## Groupe symétrique

C’est l’ensemble des permutations d’un ensemble (le nombre de ses bijections sur lui-même)

Pour un ensemble de n éléments, le nombre de permutations est

## Famille génératrice

Puisque toute permutation peut se décomposer en transpositions, le sous-ensemble des transpositions de ce groupe symétrique est suffisant pour envisager n’importe quelle permutation. Ce sous-ensemble est une famille génératrice du groupe.

## Base génératrice

Une famille génératrice dans laquelle aucun élément ne peut être obtenu à partir des autres éléments de la famille est appelée base génératrice du groupe.

## Sous-groupe

Dans un groupe, un sous-groupe est un sous-ensemble contenant l’élément identité et stable par l’opération de composition.

Dans notre jeu, nous verrons que l’ensemble des permutations qui permettent de passer d’une situation résoluble à la solution n’est pas le groupe symétrique, mais un sous-groupe de celui-ci.

# Propriétés

Pour une taille N=L\*H, il y a n!=∏ i=1 to N i = 1\*2\*…\*N dispositions possibles des pièces (hors contraintes de mouvement).

Par exemple, pour un tableau de 4\*4 cases, il y a 16 ! = 20 922 789 888 000 possibilités.

Chaque mouvement est une transposition impliquant la case vide V.

Toute succession de mouvements est réversible. Quelle que soit la complexités des mouvements qu’on fait effectuer à V, faire les mêmes transpositions dans l’ordre inverse restaure la situation initiale.

Dans un tableau d’au moins 2x2, on peut toujours amener V à côté d’une pièce donnée P sans toucher à la position de P, pour autant que cet « à côté » soit dans la grille.

Maintenant que V est à côté de P, les permuter fait déplacer P d’une case.

Ainsi, on peut par ces opérations successives amener P dans n’importe quelle case choisie arbitrairement. Bien sûr cela ne conserve pas la position des autres pièces.

Traçons à partir de V un chemin passant les voisines successives, sans croisements, en rebouclant sur V.

Soit P le nombre de pièces (y compris V) que forme ce chemin.

On peut par transpositions successives venir placer V sur chaque position de ce chemin. Et si on effectue P transpositions sans jamais revenir en arrière, V retrouve sa position d’origine. Et les autres pièces ? elles ont subi une permutation cyclique de 1 case dans le sens inverse du parcours de V.

Illustration :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | 4 | 5 | 6 |  |  | 4 | 5 | 6 |  |  | 4 | 5 | 6 |  |  | 4 | 5 | 6 |  |  | V | 5 | 6 | |  | 3 |  | 7 |  |  | 3 |  | 7 |  |  | 3 |  | 7 |  |  | V |  | 7 |  |  | 4 |  | 7 | |  | 2 | 1 | V |  |  | 2 | V | 1 |  |  | V | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | 1 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | 5 | V | 6 |  |  | 5 | 6 | V |  |  | 5 | 6 | 7 |  |  | 5 | 6 | 7 | |  |  |  |  |  |  | 4 |  | 7 |  |  | 4 |  | 7 |  |  | 4 |  | V |  |  | 4 |  | 1 | |  |  |  |  |  |  | 3 | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 | V | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |

Ainsi on voit que dans une grille 2x2, ou dans une portion 2x2 d’une grille, contenant la case V, les seules dispositions possibles des 4 pièces pour une position V donnée sont les 3 permutations cycliques des 3 autres pièces.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 1 | 2 |  | 3 | 1 |  | 2 | 3 | | 3 | V |  | 2 | V |  | 1 | V | |

Et donc puisque par la suite, on peut placer V dans chacune des autres cases, on obtient 3\*4 = 12 dispositions.

Or, en dehors de toute contrainte de mouvements, il existe 4 ! = 24 dispositions possibles de ces 4 pièces.

Il reste à vérifier qu’aucune disposition ainsi obtenue n’est en doublon, ce qui est vrai pour les 3 premières, et l’est encore pour les autres de chacune des trois premières puisqu’une rotation autour du centre de la grille 2x2 ramène à une des deux autres positions d’origine.

Dans une grille de 2x3, on peut toujours placer n’importe quelle pièce en case 1, et n’importe quelle autre en case 2.

Limitons nous, dans un puzzle plus grand, à une zone 2x3, contenant les pièces qu’on numérote de 1 à 6, dont la pièce V. Elles sont mélangées. On souhaite placer 1 en case 1, 2 en case 2.

* Si 1 n’est pas en 1, l’y amener par la technique décrite ci-dessus pour placer une pièce quelconque à un emplacement quelconque.
* Si maintenant que 1 est en 1, si 2 est en 2, c’est terminé ;
* Si 1 est en 1, V en 2, 2 en 4, permuter V et 2 résout le problème.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | 1 | V | |  | 2 | |  |  | |

* Sinon, 2 et V sont toutes 2 dans les 4 cases du bas, et on peut par quelques mouvements, amener 2 en case 6. Si alors V est en case 5, on peut l’amener en case 3 : Ainsi on aura l’une des deux configurations suivantes :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 1 |  |  | 1 |  | | V |  |  |  | V | |  | 2 |  |  | 2 | |

On peut alors par des mouvements circulaires de V dans les 4 cases supérieures, amener 1 en 4.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  |  | |  | 1 | |  | 2 | |

Et finir par placer V au-dessus de 1 sans toucher à 2.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  | V | |  | 1 | |  | 2 | |

Dans cette configuration, en faisant effectuer à V 7 transpositions dans le sens horaire dans les 6 cases, on obtient la situation souhaitée.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | V |  |  | 1 |  |  | 1 |  | V | 1 |  | 1 | V |  | 1 | 2 | |  | 1 |  |  | V |  |  | 2 |  |  | 2 |  |  | 2 |  |  | V | |  | 2 |  |  | 2 |  |  | V |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |

# Rangement

On voit donc un algorithme susceptible de résoudre une situation initiale.

Dans une grille LxH d’au moins 3x3

Les colonnes sont numérotées de 0 à L-1 de gauche à droite

Les lignes sont numérotées de 0 à H-1 de haut en bas

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ranger individuellement les pièces à leur emplacement dans la rangée du haut, de gauche à droite, jusqu’à la colonne L-3 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |
| Puis placer simultanément les pièces des cases (0, L-2) et (0, L-3) en fin de ligne. | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |
| On recommence avec la ligne suivante, jusqu’à la ligne H-4. | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |
| En ligne H-3, on effectue le rangement dans le même ordre, mais à chaque pièce rangée, on fait succéder, avant de traiter la pièce suivante à droite, le rangement simultané des deux pièces situées sous celle-ci.  Quand on arrive à la colonne L-3, après rangement des deux pièces en fin de colonne, on range les deux pièces en fin de ligne H-3 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |

Il reste à ranger ce dernier carré en bas à droite, ou à constater qu’il ne peut être rangé.

# Evaluation

Avant de se lancer dans le rangement d’une grille donnée, il serait bon de pouvoir rapidement évaluer si cette grille peut ou non être rangée, et, pourquoi pas, quelle opération minimale faut-il faire pour passer d’une configuration non résoluble à une configuration résoluble.

## Résolubilité

La méthode de résolution proposée aboutit au rangement de toutes les pièces, sauf deux, celles situées au-dessus et au-dessus à gauche de la case vide dans son emplacement final : le coin en bas à droite.

|  |  |
| --- | --- |
| A | B |
| C | V |

Si à la fin du rangement, les pièces A et B sont dans leur emplacement définitif, le puzzle est résolu et donc était résoluble.

Dans le cas contraire, la génération de tous les mouvements possibles qui au final laissent V à sont emplacement définitif montre que seules trois configurations sont possibles :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B |  | C | A |  | B | C |
| C | V |  | B | V |  | A | V |

Elles sont obtenues par permutation circulaire des trois pièces dans cet ordre A, B, C.

Une permutation circulaire est la combinaison de deux transpositions. Par exemple

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Placement initial | A | B | C |  | = |  | A | B | C | Placement initial |
| Permutation circulaire | C | A | B |  |  | A | C | B | 1ère transposition |
|  |  |  |  |  |  |  | C | A | B | 2ième transposition |

## Rendre résoluble

Avec les notations précédentes, puisque A et B ne font pas l’objet d’un placement explicite, si on intervertit dès le départ A et B, on obtiendra un carré final rangé.

# Placement

Comment automatiser les déplacements des pièces sans produire un algorithme complexe ?

Pour le rangement d’une pièce, les contraintes sont les suivantes :

Soit A la pièce d’indice a

* Respecter les pièces déjà rangées, d’indices 0 à r (r = a-1, sauf dans les algorithmes de rangement de fin de ligne et fin de colonne)
* Ne pas sortir du tableau
* Déplacer la pièce A vers sa case d’indice a.

Pour approcher A de sa case, il faut déplacer V pour la placer entre A et sa case, voisine de A, puis switcher A et V, et recommencer

L’algorithme est donc

Tant que A n’est pas en case a

Amener V contre A en choisissant le voisin pour rapprocher A de sa case a

Switcher A et V

Fin tant que

Comment se fait le choix du voisin parmi les 4 possibles ?

* Il doit être dans la grille
* Il ne doit pas être dans la zone des pièces déjà rangées
* Sa distance à a est la plus faible

On mesure la distance dite de « Manhattan ».

Si plusieurs possibilités semblent équivalentes, on les conserve toutes, car la meilleure peut dépendre de l’environnement (emplacement de V, cases libres)

Comment déplacer V pour l’amener contre A ?

On génère tous les chemins en privilégiant ceux approchant V de sa destination, sans sortir de la grille, sans empiéter sur les pièces déjà rangées, sans passer par A.

Un chemin est une liste chainée de plateaux intermédiaires, chacun (sauf le premier) enregistrant le mouvement qui y a mené

Hashset plateauxRencontres

List PlateauxAtester

plateauxRencontres.add(plateauactuel)

PlateauxAtester.add(plateauactuel)

Solution = null

Boucle

Si plateauxatester est vide

Throw new applicationexception // une solution doit exister

Fin si

Prendre de plateauxatester le plateau P le plus prometteur

Générer les plateaux P’ accessibles depuis P

Si P’ déjà dans plateauxrencontres, continuer

Si P’ solution

Solution = P’

Break

Fin si

Ajouter P’ à plateauxRencontres

Insérer P’ dans PlateauxAtester avec évaluation de sa pertinence

Fin Boucle

Si solution == null

Throw exception

Fin si

List mvts

Tant que solution != null

Mvts.add solution.mvt

Solution = solution.parent

Fin tant que

Mvts.reverse

Pour chaque Mvt de mvts

Effectuer le switch de Vide selon ce Mvt

Fin pour

# Rangement de début de ligne

Nous voulons ranger la pièce d’indice P, de case de rangement F de coordonnées (xf,yf), actuellement en position posP, de coordonnées coordP = (xp  yp)

Nous nous imposons les limitations suivantes :

* xf ≤ L-3, yf ≤ H-3 (il y a au moins deux colonnes à droite, deux lignes sous F.
* Pour tout (x,y) tel que y<yf, la case (x,y) contient sa pièce rangée (les lignes au-dessus de l’emplacement définitif de P sont rangées)
* Pour tout (x,y) tel que x<xf et y==yf, , la case (x,y) contient sa pièce rangée (les cases à gauche de l’emplacement définitif de de P sont rangées)
* Evidemment, ni P ni V ne sont dans ces lignes et cases déjà rangées (bien qu’elles puissent être fortuitement dans leur rangement)

Si P est déjà en F, il n’y a rien à faire

Sinon il est toujours possible d’amener V sur un voisin de P qui ne soit pas dans ces cases rangées, sans perturber ni P ni ces cases rangées, et tel que le voisin de P choisi soit plus proche de F que P :

Si P est dans la colonne de F, P est nécessairement sous F, on peut amener V au-dessus de P, passant au besoin par sa droite (.

Sinon, on peut amener V à droite ou à gauche de P dans une colonne plus proche de (voire confondue avec) la colonne de F.

En transposant P et V, on a rapproché P de F, sans avoir bougé aucune des pièces déjà rangées.

En répétant l’opération, la distance diminuant constamment, on finit par amener P en F.

Il faut maintenant passer à la case à droite de F et venir y ranger sa pièce, jusqu’à la colonne H-3 comprise.

# Rangement de fin de ligne

## Première approche

Maintenant qu’il reste deux cases en fin de ligne à ranger, voici comment on peut procéder :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Soient A et B à ranger respectivement en (L-2, yf), (L-1, yf) | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | L-2 | L-1 | | yf | A | B | |  |  |  | |  |  |  | |
| On choisit d’amener soit B en (L-1,yf), soit A en (L-2,yf)  Pour faire ce choix, on peut choisir celui où la distance est moindre.  Puis on amène l’autre pièce sous la première.  Puis on amène V à côté de la première (il ne reste qu’un voisin libre) | |  |  | | --- | --- | | V | A | |  | B | |  |  | |
| Et en deux mouvements de V, on a placé les deux pièces simultanément. | |  |  | | --- | --- | | A | B | |  | V | |  |  | |
| Mais amener B sous A en L-1, ou A sous B en L-2 peut s’avérer compliqué. Par exemple : | |  |  | | --- | --- | | B | A | |  |  | |  |  | |
| Ou encore  (ou d’autres positions semblables) | |  |  | | --- | --- | |  | V | | B | A | |  |  | |

## Deuxième approche

Il semble qu’il y ait de nombreux cas particuliers. Il existe toujours la méthode gros bourrin, placer la pièce A suffisamment éloignée de B, placer l’autre pièce B près de sa destination, rapatrier A, ajuster les deux dans leurs logements définitifs. Il y a une autre méthode bourrin : amener A, B et V dans le rectangle 2x3, utiliser un calcul exhaustif (voire un pré-calcul, puisque les cas sont limités, surtout si on prend en compte les symétries) de toutes les situations possibles pour enchainer les mouvements adéquats. On peut faire ça aussi pour le carré final. Mais il semble là aussi qu’on n’échappe pas aux cas tordus : il faut déjà amener les trois dans le rectangle, et dans certains cas, c’est pas gagné.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| L’objectif est de placer les deux pièces A et B dans cet ordre dans le rectangle en haut à droite d’une ligne donnée : | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | A | B | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |
| Il faut déjà amener les trois pièces, A, B, V, dans ce rectangle, ce qui peut déjà poser des problèmes : une solution est de contourner A pour venir se mettre au-dessus de lui. | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | A | B | |  |  |  |  |  |  | V | |
| 5 mouvements sont ainsi nécessaires. Mais est-ce la solution la plus efficace ? | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | V |  | |  |  |  |  |  | A | B | |  |  |  |  |  |  |  | |
| On pourrait choisir de baisser B hors du 2x3, puis d’amener A en haut à droite du 2x3, puis B sous A. Et enfin placer A et B. |  |

On peut raisonnablement élargir la zone de placement automatique.

Pour générer toutes les situations, tout en assurant un chemin minimal pour les résoudre, partons de la situation solution et travaillons sur les situations qui en découlent, en privilégiant les chemins les plus courts et en gérant la redondance. Seules les pièces A, B et V sont impliquées.

## Troisième approche

On considère une zone de placement automatique 2x3 pour une fin de ligne ou 3x2 pour une fin de colonne. L’explication ci-dessous se place dans l’optique d’une fin de ligne.

Si aucune des deux pièces A ou B n’est dans la zone

* On choisit l’une des deux pièces, par exemple celle la plus proche de la destination de l’autre, disons A.
* On place A en case définitive de B, sans craindre de bouger B au passage, qui reste hors zone
* On ramène B sous A
* On finit de placer les deux simultanément

Si au plus une des deux pièces A ou B est dans la zone de placement automatique 2x3, par exemple A

* On place A en case définitive de B, sans craindre de bouger B au passage, qui reste hors zone
* On ramène B sous A
* On finit de placer les deux simultanément

Si A et B sont dans la zone, mais pas V,

* On amène V dans la zone par le plus court chemin, sans craindre de déplacer A ou B.
* Une fois cela fait, on peut se retrouver
  + avec A et B toujours dans la zone,
  + ou seulement l’une des deux car on en aura chassé l’autre.

Si les 3 sont dans la zone on identifie la situation avec l’une de celles précalculées, et on applique les mouvements enregistrés.

## Précalcul des résolutions

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| On part des deux solutions possibles : ce sont les deux premières situations à évaluer. Ici celles d’une fin de ligne. | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | A | B |  | A | B | | V |  |  |  | V | |  |  |  |  |  | |

On déplace V sur chaque voisin de A ou B disponible dans la zone, même si l’autre bouge dans l’opération, car elle reste dans la zone.

On permute

On ignore la position obtenue si elle a déjà été rencontrée

Sinon on enregistre la situation avec un lien sur la situation parent et le nombre total de mouvements qui ont été nécessaires (somme de celui nécessaire au parent et de celui nécessaire au déplacement de V et de sa permutation)

On choisit une situation non encore évaluée dont le chemin est parmi les plus courts, on recommence.

# Rangement de fin de colonne

Symétrique au rangement de fin de ligne

# Rangement du dernier carré

Partant d’une situation donnée et appliquant des mouvements soit dans le sens horaire, soit dans le sens anti-horaire , on aboutit finalement à la position rangée.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| horaire | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| V | C |  | C | V |  | C | A |  | C | A |  | V | A |  | A | V |  | A | B |
| B | A |  | B | A |  | B | V |  | V | B |  | C | B |  | C | B |  | C | V |
| anti-horaire | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| V | C |  | B | C |  | B | C |  | B | V |  | V | B |  | A | B |  | A | B |
| B | A |  | V | A |  | A | V |  | A | C |  | A | C |  | V | C |  | C | V |

Il suffit de tester deux des 4 cases pour repérer combien de mouvements il faut effectuer, et dans quel sens.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | C |  | 6 horaire | V |  |  | 2 horaire | V |  |  | 2 anti-horaire |
| B | A |  |  |  | B |  |  |  | C |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | V |  | 5 horaire |  | V |  | 1 horaire |  | V |  | 3 anti-horaire |
|  | A |  |  |  | B |  |  |  | C |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 5 anti-horaire |  |  |  | 3 horaire |  |  |  | 1 anti-horaire |
| V | A |  |  | V | B |  |  | V | C |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| A |  |  | résolu | B |  |  | 4 anti-horaire | C |  |  | 4 horaire |
|  | V |  |  |  | V |  |  |  | V |  |  |